Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

ВАРИАНТ 183

Инструкция по выполнению работы

На выполнение заданий варианта КИМ по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 10 заданий (задания B1–B10) базового уровня сложности, проверяющих наличие практических математических знаний и умений.

Часть 2 содержит 11 заданий (задания B11–B15 и C1–C6) повышенного и высокого уровней по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Ответом к каждому из заданий B1–B15 является целое число или конечная десятичная дробь. При выполнении заданий C1–C6 требуется записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, как они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания B1–B10 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1

Поезд из Санкт-Петербурга отправляется в 22 часа 50 минут и прибывает в Москву в 6 часов 50 минут на следующий день. Сколько часов поезд находился в пути?

Решение

24ч -22ч50мин+6ч50мин=8ч

Ответ:8

B2

Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 900 рублей после понижения цены на 20%?

Решение.

После понижения цены тетрадь станет стоить $40 - 0{,}2 \cdot 40 = 32$ рублей. Разделим 900 на 32:

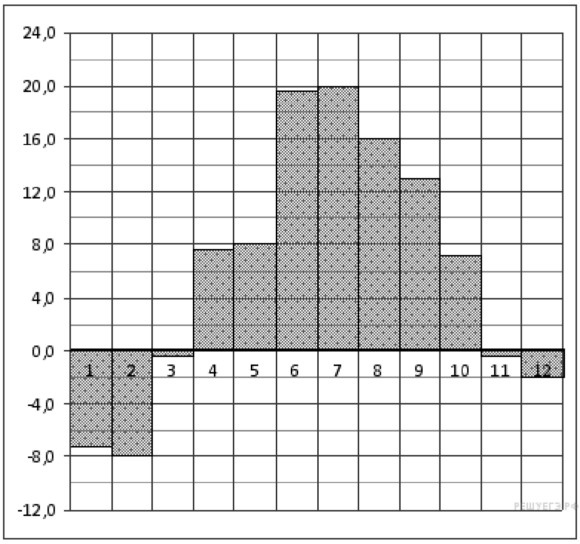
$900:32=28.125$

Значит, можно будет купить 28 тетрадей.

Ответ: *28.*

B3

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1999 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из диаграммы видно, что наименьшая среднемесячная температура во второй половине года составляла −2 °C (см. рисунок).

Ответ: *−2.*

B4

Строительная фирма планирует купить 72 м^3 досок у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость досок (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия доставки
А	2 950	5 000	Нет
Б	3000	6 000	При заказе товара на сумму свыше 150 000 рублей доставка бесплатная
В	2 980	4 000	При заказе более 75м^3 доставка бесплатно

Решение.

Рассмотрим все варианты.

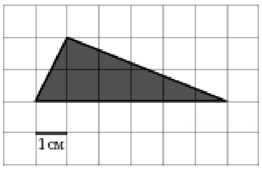
При покупке у поставщика *А* стоимость заказа складывается из стоимости досок $2950 \cdot 72 = 212400$ руб. и стоимости доставки: $212400 + 5000 = 217400$ руб.

При покупке у поставщика *Б* стоимость досок составляет $3000 \cdot 72 = 216\,000$ руб., что превышает 150 000 руб., поэтому доставка бесплатна. Таким образом, стоимость заказа 216 000 руб.

При покупке у поставщика *В* стоимость заказа складывается из стоимости досок 2980· . 72 = 214560 руб. и стоимости доставки: 214560 + 4000 = 218560 руб.
Стоимость самого дешевого варианта составляет 216000 рублей.
Ответ: 216000

В 5

На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Решение.
Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к этому основанию. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ см}^2.$$

Ответ: 6.

В6 В сборнике билетов по географии всего 25 билетов, в 6 из них встречается вопрос о водоёмах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о водоёмах.
Решение
6:25=0,24
Ответ:0,24

В7

Найдите корень уравнения $2^{2x-14} = \frac{1}{16}$

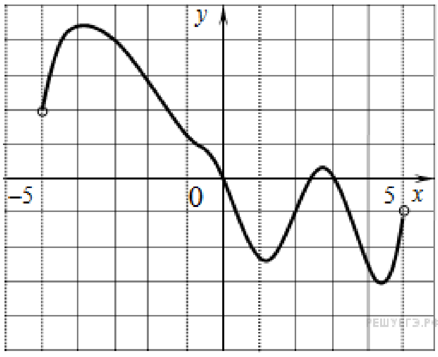
Решение
$2^{2x-14} = 2^{-4}$,2x-14= -4, x=5
Ответ:5

В8

Треугольник *ABC* вписан в окружность с центром *O*. Найдите угол *BOC*, если угол *BAC* равен 34°. Ответ дайте в градусах
Решение.

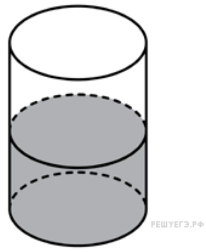
<BAC-вписанный ,<BOC-центральный,следовательно,<BOC=2<BAC=68°
Ответ:68

В9 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−5; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



Решение.
Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает, т. е. на интервалах
(−3,8; 1,2) и (2,8; 4,4). В них содержатся целые точки −3, −2, −1, 0, 1, 3, 4. Их 7 штук.
Ответ: 7.

B10 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 27 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 3раза больше первого? Ответ выразите в см.



Решение.

Объем цилиндрического сосуда выражается через его диаметр и высоту как $V = H\frac{\pi d^2}{4}$. При увеличении диаметра сосуда в 3 раза высота равного объема жидкости $H = \frac{4V}{\pi d^2}$ уменьшится в 9 раза и станет равна 3.

Ответ: 3.

ЧАСТЬ 2

Ответом на задания B11–B15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B11 Найдите $2\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\pi < \alpha < 2\pi$

Решение:

По основному тригонометрическому тождеству:$\sin\alpha = -0{,}6$, поэтому

$2\sin\alpha = -1{,}2$.

Ответ:-1,2

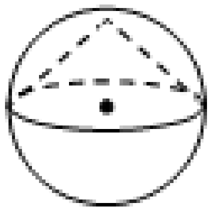
B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 396 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отраженного на дне океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением $v = c * \frac{f-f_0}{f+f_0}$, где c = 1500 м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемого сигнала (в МГц), f – частота отраженного сигнала (в МГц). Найдите частоту (в МГц) отраженного сигнала, если батискаф погружается со скоростью 15 м/с.

Решение:

$1500\frac{f-396}{f+396}$=15.отсюда f=404/

Ответ:404

B13 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $2\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



Решение.

$L=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}).^2}$.$L=4$

Ответ:4

B14 Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Пусть *u* км/ч — скорость моторной лодки, тогда скорость лодки по течению равна *u+1* км/ч, а скорость лодки против течения равна *u-1* км/ч. На путь по течению лодка затратила на 2 часа меньше, отсюда имеем:

$$\frac{255}{u-1}-\frac{255}{u+1}=2\Leftrightarrow\frac{255\cdot 2}{u^2-1}=2\Leftrightarrow u^2=256\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=16;\\ u=-16\end{array}\right.\underset{u>0}{\Leftrightarrow}u=16.$$

Ответ: 16.

B15 Найдите точку минимума функции $y=4x-4\ln(x+7)$.

Решение.

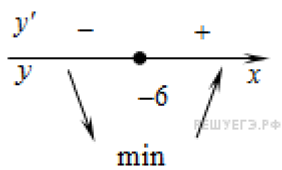
Заметим, что $y=4x-4\ln(x+7)$. Область определения функции — открытый луч $(-7;+\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y'(x)=4-\frac{4}{x+7}.$$

Найдем нули производной:

$$4-\frac{4}{x+7}=0\Leftrightarrow x=-6.$$

Найденная точка лежит на луче $(-7;+\infty)$. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=-6$.

Ответ: −6.

Для записи решений и ответов на задания С1-С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т.д.),а затем полное обоснованное решение и ответ.

$\boxed{\textbf{С1}}$. а) Решите уравнение $2\sin^2 x = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$.

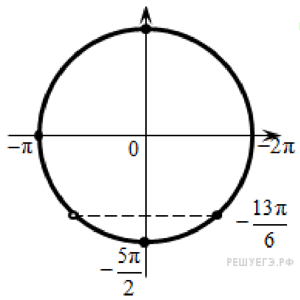
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$2\sin^2 x = -\sin x \Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) = 0.$$

Значит, либо $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, либо $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.



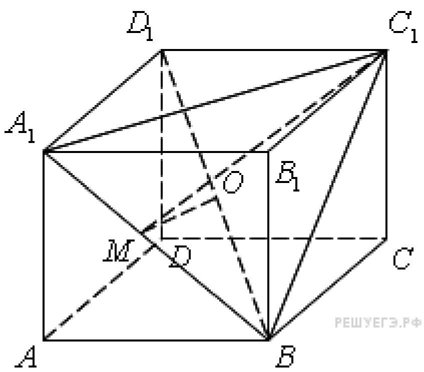
б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. Получим числа: $\frac{-13\pi}{6}$;-2π;-π

Ответ:

а) $x = \pi k,\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) $-\frac{13\pi}{6}$.-2π. −π.

$\boxed{\text{С2}}$ В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.



Решение.

Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B. $A_1D_1 \perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1, поэтому $MO \perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 — равносторонний, $C_1M \perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1.

Примем длины ребер куба за *a*. Найдем стороны треугольника OMC_1. Из треугольника BA_1D_1 находим $OM = \dfrac{a}{2}$; из равностороннего треугольника BA_1C_1 находим

$$MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$OC_1 = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, поскольку O — середина диагонали AC_1, то. Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:

$$\cos\angle OMC_1 = \frac{OM^2 + MC_1^2 - OC_1^2}{2 \cdot OM \cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

C3 Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{4-x}\dfrac{-5-x}{x-4} \le -1, \\ \dfrac{x^2-5x+3}{x-4} + \dfrac{5x-27}{x-6} \le x+4. \end{cases}$

*Решение***.**

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}\frac{-5-x}{x-4} \le -1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(5+x) - \log_{4-x}(4-x) \le -1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(x+5) \le 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4-x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+5) \le 0, \\ 0 < 4-x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \ge 1, \\ 3 < x < 4; \end{cases}$$ откуда $3 < x < 4$.

Второй случай: $4-x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+5) \le 0, \\ 4-x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+5 \le 1, \\ x < 3, \end{cases}$$ откуда $-5 < x \le -4$.

Решение первого неравенства исходной системы: $x \in (-5, -4] \cup (3, 4)$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2-5x+3}{x-4} + \frac{5x-27}{x-6} \le x+4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{x-4} - \frac{1}{x-4} + \frac{5(x-6)}{x-6} + \frac{3}{x-6} \le x+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-6} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{(x-4)(x-6)} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \in (-\infty, 3] \cup (4, 6)$.

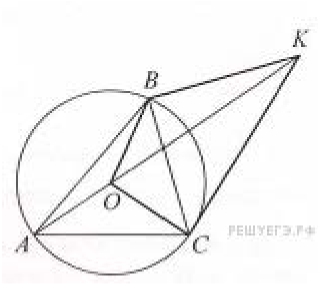
3. Решение исходной системы неравенств: $-5 < x \le -4$.

Ответ: $(-5;\ -4]$.

C4 Около остроугольного треугольника *ABC* описана окружность с центром *O*. На продолжении отрезка *AO* за точку *O* отмечена точка *K* так, что $\angle BAC$ + <*AKC*=90°.

а) Докажите, что четырёхугольник *OBKC* вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника *OBKC*, если $\cos\angle BAC = \dfrac{3}{5}$, а $BC = 48$.



Решение.

а) Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle OKC = \angle AKC = 90^\circ - \alpha$ и $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$. Треугольник *BOC* равнобедренный, следовательно

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle OBC = \angle OKC$$

Получаем, что точки *O*, *B*, *K* и *C* лежат на одной окружности. Следовательно, четырёхугольник OBKC вписанный.

б) По условию $\cos\angle BAC = \frac{3}{5}$, поэтому $\sin\angle BAC = \frac{4}{5}$.

Радиус окружности описанной около треугольника *ABC*, равен

$$OC = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{48}{2\cdot\frac{4}{5}} = 30.$$

Пусть *R* — радиус окружности, описанной около четырёхугольника *OBKC*. В треугольнике *OCK* имеем:

$$R = \frac{OC}{2\sin\angle OKC} = \frac{OC}{2\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{OC}{2\cos\alpha} = \frac{30}{2\cdot\frac{3}{5}} = 25.$$

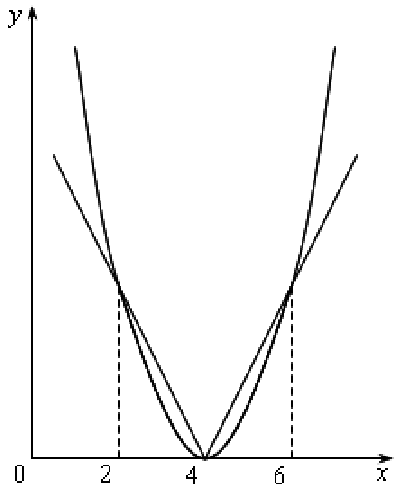
Ответ: 25.

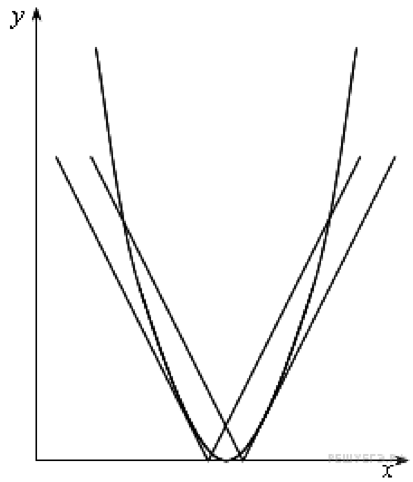
C5 Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $x^2 - 8x = 2|x-a| - 16$ имеет ровно три различных решения.

Решение.

Запишем уравнение в виде $(x-4)^2 = 2|x-a|$ и рассмотрим графики функций $y = (x-4)^2$ и $y = 2|x-a|$.

График первой функции — парабола, график второй функции — угол с вершиной в точке *a*.





Уравнение будет иметь три различных решения в следующих случаях.

1. Вершина параболы совпадает с вершиной угла (рис. 1).
2. Одна из сторон угла касается параболы (рис. 2).

В первом случае $a = 4$, и уравнение имеет три корня: 2, 4, 6. Рассмотрим второй случай. Пусть правая сторона угла касается параболы. Уравнение $(x-4)^2 = 2x - 2a$, а должно иметь единственное решение.

Приведём уравнение к стандартному виду:

$x^2 - 10x + 16 + 2a = 0$.

Из равенства нулю дискриминанта получаем

$25 - (16 + 2a) = 0$,

откуда $a = 4,5$.

Если параболы касается левая сторона угла, получаем уравнение

$(x-4)^2 = 2a - 2x$; $x^2 - 6x + 16 - 2a$.

Оно имеет единственное решение, только если $a = 3,5$.

Ответ: 3,5; 4; 4,5.

С6 На доске написано более 55, но менее 65 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 15, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −5.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $15k - 5l + 0 \cdot m = 7(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 5, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 5. По условию $55 < k + l + m < 65$, поэтому $k + l + m = 60$. Таким образом, написано 60 чисел.

б) Приведём равенство $15k - 5l = 7(k + l + m)$ к виду $8k = 12l + 7m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $8k \geq 12l$, откуда $k > l$. Следовательно, положительных чисел больше, чем отрицательных.

в) Подставим $k + l + m = 60$ в правую часть равенства $15k - 5l = 7(k + l + m)$, откуда $3k - l = 84$ Так как $k + l \leq 60$, получаем: $4k - 84 \leq 60$; $k \leq 48$, то есть положительных чисел не более 48.

Ответ: а) 60; б) положительных в) 48.